Farvespredningens Theori.

Af

L. Lorenz.

Vidensk. Selsk. Skr. 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. II. 5.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1883.

Da vi kjende saavel Lovene for Lysbevægelserne i et fuldkommen homogent og gjennemsigtigt Medium som Lovene for Bevægelserne ved Overgangen fra et saadant Medium til et andet lignende, saa maa det altid være muligt uden nogen som helst Hypothese at beregne Lysbevægelserne i det Indre af et ikke homogent, overalt fuldkommen gjennemsigtigt Medium, naar kun Lysets Hastighed, den eneste Størrelse, hvorpaa det her kommer an, er bekjendt i ethvert Punkt af samme. Jeg skal her forsøge at udføre en saadan Beregning med det Formaal, at udlede Loven for et isotropt, gjennemsigtigt Legemes Farvespredning, navnlig for saa vidt denne er afhængig af Bølgelængden og Legemets Vægtfylde.

De almindelige, til en variabel Forplantningshastighed svarende, Love for Lysbevægelserne har jeg allerede for 20 Aar siden udviklet i min Lystheori. Disse almindelige Love skal jeg her, uden at støtte mig paa tidligere Arbejder, udlede paa ny og paa en simplere Maade.

Da endvidere Opgaven gaar ud paa at beregne Lysbevægelserne i et Legemes Indre, saa maa en bestemt indre Konstitution af Legemet forudsættes. Der kan vel næppe herske nogen Tvivl om, at Legemerne bestaa af adskilte Atomer eller Molekuler, og det fremgaar yderligere af min Theori af Refraktionskonstanten, som har vist sig i god Overensstemmelse med Erfaringen, at ved alle fysiske Tilstandsforandringer forbliver en Del af Lysmediet uforanderlig forbunden med Atomerne, medens Lyset i det øvrige Mellemrum forplanter sig med samme Hastighed som i det tomme Rum eller i Verdensrummet. Forøvrigt bliver der med Hensyn til Atomernes Gruppering og Lysmediets Afhængighed af denne Gruppering endnu en vid Mark aaben for Hypotheser, men til en Begyndelse maa Beregningen indskrænke sig til de simplest mulige Forudsætninger. Jeg antager derfor, at Lysets Hastighed nær ved Atomerne, som jeg betragter som mathematiske Punkter, er en Funktion af Afstanden fra Atomet og den samme Funktion for alle Atomer, at endvidere Hastigheden i større Afstande er den samme som i det tomme Rum, og endelig, at Atomerne ere lejrede tilfældigt, dog saaledes, at de tilfredsstille Betingelserne for Legemets Isotropi.

Man vil her kunne gjøre den Indvending, at Atomernes indre Bevægelser ligeledes ere en uomstødelig Kjendsgjerning, som ogsaa maa tages med i Betragtning. Efter de for Tiden gængse Forestillinger ere disse Bevægelser af en dobbelt Art, dels nemlig saadanne som antages at være identiske med Varmen, dels andre, som foregaa i Takt med Lyssvingningerne og som antages at være Aarsagen til Legemernes Absorbtion og Udstraaling af Lyset.

Skjøndt jeg ingenlunde anser Identiteten af Varmen og de indre molekulære Bevægelser for bevist, saa betvivler jeg dog aldeles ikke saadanne Bevægelsers Existens, men de Hastigheder, hvorom her er Tale, ville i Sammenligning med Lysets Hastighed altid være saa smaa, at de ingen kjendelig Indflydelse kunne faa paa Lysbevægelserne. Det eneste bekjendte Spor af en Indvirkning af Legemernes Bevægelser paa Lyset (bortset fra et meget tvivlsomt, 33 Aar gammelt Forsøg af Fizeau over Lysets Gjennemgang gjennem strømmende Vand) er Stjernernes Aberration, men de molekulære Hastigheder ere endnu langt mindre end Jordens Hastighed i Verdensrummet.

Den anden Art af Bevægelser danner Grundlaget for de nyere Lystheoretikeres Arbejder over Absorbtionen og Emissionen. Mod Antagelsen af disse Bevægelser kunde strax gjøres den Indvending, at naar et Legemes Atomer skulde ligesom Lyset kunne udføre 500 Billioner Svingninger i Sekundet, saa maatte der være saa uhyre Kræfter tilstede i Legemets Indre, at en Forskydelse af en Billiontedel Millimeter fra Ligevægtsstillingen af de i et Gram indeholdte Atomer vilde udkræve et Tryk af en Billion Kilogram. Denne Hypothese er dog ikke opfunden for at forklare en eller anden umiddelbart ved Lyset fremkaldt Massebevægelse, da vi overhovedet ikke kjende nogen saadan Virkning af Lyset, men kun til Forklaringen af visse optiske Fænomener, som maaske ogsaa kunde forklares paa anden Maade. Hvorledes nu dette end forholder sig, saa vil det dog i ethvert Tilfælde være nødvendigt først at beregne Medsvingningerne af det Atomerne omgivende Lysmedium under Forudsætning af, at Atomerne ere i Hvile. Skulde det derefter vise sig nødvendigt at antage Atomernes Medsvingninger, saa vilde disse altid bagefter kunne medtages i Regningen.

De almindelig anerkjendte Love for Lysets Svingninger i et isotropt og fuldkommen homogent Medium kunne udtrykkes ved følgende Ligninger:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2\xi = \frac{d^2\xi}{a^2dt^2},\quad \Delta_2\eta = \frac{d^2\eta}{a^2dt^2},\quad \Delta_2\zeta = \frac{d^2\zeta}{a^2dt^2},\\ \frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz} = \theta = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

idet ξ, η, ζ ere Lyssvingningernes Komposanter og

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}.$$

a betegner her Lysets konstante Forplantningshastighed.

Ved Overgangen fra et saadant Medium til et andet lignende, hvor dog Hastigheden er forskjellig, følger Lysstraalen den bekjendte Sinuslov, medens ifølge de af Fresnel opdagede Love Amplituderne i de indfaldende, brudte og tilbagekastede Straaler forholde sig som

$$1 : \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)} : \frac{tg (\alpha - \beta)}{tg (\alpha + \beta)},$$

naar den indfaldende Straales Svingninger ligge i Indfaldsplanen, og som

$$1 : \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} : -\frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)},$$

naar den indfaldende Straales Svingninger ere vinkelret paa Indfaldsplanen. Ved α er Indfaldsvinklen, ved β Brydningsvinklen betegnet. Polarisationsplanen er her antaget vinkelret paa Svingningsretningen.

Den af mig udviklede Theori gaar alene ud fra, at disse Love ere almindelig gjældende, saaledes at alle Afvigelser fra disse Love kun hidrøre derfra, at intet Legeme er fuldkommen homogent, og at Overgangen fra et Legeme til et andet foregaar successivt, uden Afbrydelse af Kontinuiteten.

De ovenfor angivne Love kunne ogsaa udtrykkes paa en anden Maade. Naar Koordinatplanen yz tages som Grænseplanen imellem de to Medier, saa ville de fire Størrelser

$$\eta, \quad \zeta, \quad \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}, \quad \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}$$

paa begge Sider af Grænseplanen faa lige store Værdier, hvilket fremgaar af de angivne Love, ligesom ogsaa disse omvendt kunne udledes af denne Sætning. Heraf følger, at for Exempel

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right) \text{ og } \frac{d}{dz}\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right)$$

ere endelige overalt, ogsaa for $x = 0$. Ved Addition af disse to Størrelser erholdes

$$\Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}.$$

Dette Udtryk har altsaa overalt en endelig Værdi. Man vil saaledes ifølge den anden Ligning (1) kunne danne Ligningen

$$\Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2}$$

som fælles for begge Medier, idet ω er Forplantningshastigheden, som antager forskjellige Værdier i de to Medier. Paa ganske lignende Maade kan man af de ovenstaaende Grænsebetingelser udlede Ligningen

$$\Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2},$$

og, da yz-Planen vilkaarlig er valgt som Grænseplan, ved Omsætning af Bogstaverne

$$\Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Saaledes ere altsaa alle Lovene for Lysbevægelserne udtrykte ved tre partielle Differentialligninger, af hvilke atter de Love, vi ere gaaede ud fra, let ville kunne afledes. De fundne Differentialligninger maa ogsaa vedblive at gjælde, naar ω betragtes som en hvilken som helst Funktion af x, y og z. De indeholde egentlig intet nyt, og man vilde kunne undvære dem, men de ere af stor Betydning for den praktiske Regning.

Indskrænke vi Beregningen til en Bølgebevægelse med given Svingningstid, kunne vi udtrykke Afhængigheden af Tiden t ved den fælles komplexe Faktor e^{kti}. Sættes

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \mu,$$

gaa de ovenfor fundne Differentialligninger over til

$$\Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} + \mu\xi = 0, \quad \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} + \mu\eta = 0, \quad \Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz} + \mu\zeta = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Jeg skal først søge at bestemme Lysbevægelsen i et af koncentriske kugleformige Lag bestaaende Medium, hvor Lysets Hastighed er alene Funktion af Afstanden r fra Centret. Inden for ethvert af disse Lag antages μ konstant, medens i de forskjellige Lag μ antager forskjellige Værdier. Selvfølgelig udelukker denne Forudsætning ikke det Tilfælde, at μ forandrer sig kontinuerlig, da Lagenes Tykkelse altid kan antages saa lille, som man vil.

Sættes

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \rho,$$

og multipliceres Ligningerne (2) henholdsvis med x, y og z, saa erholdes ved Addition

$$\Delta_2 \rho - \frac{dr^2\theta}{rdr} + \mu\rho = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

De samme Ligninger (2) differentierede med Hensyn til x, y, z og adderede give

$$\mu\theta + \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{\rho}{r} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Medens μ i Grænsefladen mellem to Lag forandrer sig diskontinuerlig, ville visse Funktioner af Svingningskomposanterne overalt variere kontinuerlig. Saaledes fremgaar af Ligning (3), at

$$\frac{d^2r\rho}{rdr^2} - \frac{dr^2\theta}{rdr}$$

er endelig overalt, hvoraf følger, at

$$\frac{dr\rho}{dr} - r^2\theta$$

er en kontinuerlig Funktion, som altsaa paa begge Sider af enhver Grænseflade, hvor μ forandrer sig diskontinuert, har den samme Værdi. Jeg vil udtrykke dette ved følgende Betegnelse

$$\left[\frac{dr\rho}{dr} - r^2\theta\right] = 0.$$

Da endvidere paa begge Sider af Grænsefladen μ er konstant og θ derfor lig 0, saa reduceres denne Grænsebetingelse til

$$\left[\frac{dr\rho}{dr}\right] = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

En anden Grænsebetingelse fremgaar deraf, at

$$\theta - \frac{d}{dr}\frac{\rho}{r}$$

maa være endelig overalt, da Differentialkoefficienterne med Hensyn til r her bortfalde. Indsættes heri den i Ligning (4) angivne Værdi af θ, gaar Udtrykket over til

$$-\frac{1}{\mu}\frac{d}{dr}\frac{\mu\rho}{r},$$

hvoraf følger, at $\mu\rho$ er en kontinuerlig Funktion, og at man altsaa for alle Grænseflader har

$$[\mu\rho] = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Disse to Grænsebetingelser i Forbindelse med den inden for ethvert Lag, hvor μ er konstant, gjældende Differentialligning

$$\Delta_2\rho + \mu\rho = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

ere tilstrækkelige til Bestemmelsen af ρ.

Naar i den første Ligning (2) sættes $x = r\cos\varphi$, ses det, at

$$\frac{d^2r\xi}{dr^2} - \frac{d\theta}{dr}r\cos\varphi + \frac{d\theta}{d\varphi}\sin\varphi$$

er en Størrelse, som overalt er endelig. Da endvidere ligeledes, som ovenfor vist,

$$\frac{d^2r\rho}{dr^2} - \frac{dr^2\theta}{dr} \text{ og } \theta - \frac{d}{dr}\frac{\rho}{r}$$

ere endelige overalt, saa fremgaar, at

$$\frac{d^2r\xi}{dr^2} - \cos\varphi\,\frac{d^2\rho}{dr^2} + \sin\varphi\,\frac{d^2}{drd\varphi}\frac{\rho}{r}$$

er en overalt endelig Størrelse. Efter at dette Udtryk er omdannet til

$$\frac{d^2r\xi}{dr^2} - \frac{d}{dr}\left(\frac{d\rho}{dx}\right),$$

erholdes heraf Grænsebetingelsen

$$\left[\frac{dr\xi}{dr} - \frac{d\rho}{dx}\right] = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Da tillige dette Udtryk og altsaa ogsaa

$$\frac{dr\xi}{dr} - \frac{d\rho}{dr}\cos\varphi$$

er endeligt overalt, saa erholdes som anden Grænsebetingelse

$$[r^2\xi - \rho x] = 0. \qquad (9)$$

I Analogi med disse to Ligninger dannes

$$\left.\begin{array}{l} \left[\dfrac{dr\eta}{dr} - \dfrac{d\rho}{dy}\right] = 0\,, \quad [r^2\eta - \rho y] = 0, \\ \left[\dfrac{dr\zeta}{dr} - \dfrac{d\rho}{dz}\right] = 0\,, \quad [r^2\zeta - \rho z] = 0. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

til hvilke Grænsebetingelser slutte sig de udenfor Grænsefladerne gjældende Differentialligninger

$$\varDelta_2\xi + \mu\xi = 0, \quad \varDelta_2\eta + \mu\eta = 0, \quad \varDelta_2\zeta + \mu\zeta = 0. \qquad (11)$$

Desuden skal man her have $\theta = 0$.

Funktionerne ρ, ξ, η og ζ kunne udvikles i Rækker efter Kuglefunktioner. Jeg vil imidlertid her benytte en fra den sædvanlige forskjellig Form, hvorved der opnaas en betydelig Lettelse i Beregningen. Sættes

$$V_n^m = \frac{d^n}{dx^{n-m}dy^m}\,\frac{1}{r}\,, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

og antages, hvad der for den følgende Regning er tilstrækkeligt, at ρ, ξ og η ere lige Funktioner af z, ζ derimod en ulige Funktion af z, vil man kunne benytte følgende Udviklinger:

$$\rho = \Sigma\rho_n^m V_n^m, \quad \xi = \Sigma\xi_n^m V_n^m, \quad \eta = \Sigma\eta_n^m V_n^m, \quad \zeta = \Sigma\zeta_n^m \frac{d}{dz} V_{n-1}^m\,, \qquad (12)$$

idet Summationen udstrækkes til alle hele Værdier af m fra $m = 0$ til $m = n$ i de tre første Rækker og til $m = n - 1$ i den sidste Række, og dernæst til alle hele positive Værdier af n fra $n = 0$ til $n = \infty$. Koefficienterne ρ_n^m, ξ_n^m, η_n^m, ζ_n^m ere alene Funktioner af r. Tillige bemærkes, at naar der i Regningen indkommer Differentialkoefficienter med Hensyn til z af højere Orden end den første, saa bortelimineres de ved Hjælp af Ligningen

$$\varDelta_2 V_n^m = 0.$$

Af Definitionen af V_n^m fremgaar endvidere

$$\frac{dV_n^m}{dr} = -\frac{n+1}{r}V_n^m.$$

Naar Rækkeudviklingerne indsættes i Ligningerne (7) og (11), ses det, at Koefficienterne ρ_n^m, ξ_n^m, η_n^m, ζ_n^m maa tilfredsstille Differentialligningen

$$\frac{d^2f_n}{dr^2} - \frac{2n}{r}\frac{df_n}{dr} + \mu f_n = 0. \qquad (13)$$

Denne Ligning har de to partikulære Integraler

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n &= r^{2n+1}\left(1 - \frac{\mu r^2}{2(2n+3)} + \frac{\mu^2 r^4}{2.4.(2n+3)(2n+5)} - \dots\right)\\ \psi_n &= 1 + \frac{\mu r^2}{2(2n-1)} + \frac{\mu^2 r^4}{2.4.(2n-1)(2n-3)} + \dots\end{aligned}\right\} \dots\dots \quad (14)$$

Man vil altsaa kunne sætte

$$\left.\begin{aligned}\rho_n^m &= k_n^m \varphi_n + \varkappa_n^m \psi_n, & \xi_n^m &= a_n^m \varphi_n + \alpha_n^m \psi_n,\\ \eta_n^m &= b_n^m \varphi_n + \beta_n^m \psi_n, & \zeta_n^m &= c_n^m \varphi_n + \gamma_n^m \psi_n,\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots \quad (15)$$

idet alle disse nye Koefficienter ligesom μ ere konstante inden for ethvert af Lagene, men have forskjellige Værdier i de forskjellige Lag. Af Ligningerne (14) erholdes

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi_n}{rdr} &= (2n+1)\varphi_{n-1}, & \frac{d\psi_n}{rdr} &= \frac{\mu}{2n-1}\psi_{n-1},\\ r^{n+2}\frac{d}{dr}\frac{\varphi_n}{r^{2n+1}} &= -\frac{\mu}{2n+3}\varphi_{n+1}, & r^{2n+2}\frac{d}{dr}\frac{\psi_n}{r^{2n+1}} &= -(2n+1)\psi_{n+1}.\end{aligned}\right\} \dots \quad (16)$$

Ifølge Definitionen af V_n^m har man

$$xV_0^0 + r^2 V_1^0 = 0, \quad yV_0^0 + r^2 V_1^1 = 0.$$

Differentieres den første Ligning $n-m$ Gange med Hensyn til x og m Gange med Hensyn til y, og differentieres den anden Ligning $n-m+1$ Gange med Hensyn til x og $m-1$ Gange med Hensyn til y, saa erholdes to Ligninger, som let omdannes til

$$\left.\begin{aligned}(2n+1)\,xV_n^m &= -r^2 V_{n+1}^m - (n^2-m^2)V_{n-1}^m + m(m-1)V_{n-1}^{m-2}\\ (2n+1)\,yV_n^{m-1} &= -r^2 V_{n+1}^m + (n-m+1)(n-m)V_{n-1}^m - (2n-m+1)(m-1)V_{n-1}^{m-2}.\end{aligned}\right\}. \quad (17)$$

Paa lignende Maade og med Benyttelse af de sidste Ligninger erholdes

$$(2n+1)\,zV_n^m = -r^2\frac{d}{dz}V_n^m + (n-m)(n-m-1)\frac{d}{dz}V_{n-2}^m + m(m-1)\frac{d}{dz}V_{n-2}^{m-2}. \quad . \quad (18)$$

Af denne Lignlng erholdes endvidere ved Differentiation med Hensyn til z, naar $n-1$ sættes i Stedet for n,

$$\begin{aligned}(2n+1)\,z\frac{d}{dz}V_{n-1}^m = {} & r^2 V_{n+1}^{m+2} + r^2 V_{n+1}^m - (n-m-1)(n-m-2)V_{n-1}^{m+2}\\ & - \left((n-m-1)^2 + n + m^2\right)V_{n-1}^m - m(m-1)V_{n-1}^{m-2}. \quad \dots \quad (19)\end{aligned}$$

De fire Størrelser ρ, ξ, η, ζ ere indbyrdes forbundne ved Ligningerne

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \rho, \qquad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

For at bestemme de heraf følgende Relationer imellem Koefficienterne ρ_n^m, o. s. v., danner jeg først følgende Rækkeudviklinger, idet s er et vilkaarligt Tal,

$$\frac{dr^s x\xi}{dr} - r^{s+1}\frac{d\xi}{dx} = \Sigma \xi_n^m \left((s-n)\, r^{s-1} x V_n^m - r^{s+1} V_{n+1}^m\right),$$

$$\frac{dr^s y\eta}{dr} - r^{s+1}\frac{d\eta}{dy} = \Sigma \eta_n^m \left((s-n)\, r^{s-1} y V_n^m - r^{s+1} V_{n+1}^{m+1}\right),$$

$$\frac{dr^s z\zeta}{dr} - r^{s+1}\frac{d\zeta}{dz} = \Sigma \zeta_n^m \left((s-n)\, r^{s-1} z\frac{d}{dz} V_{n-1}^m + r^{s+1}(V_{n+1}^m + V_{n+1}^{m+2})\right).$$

Ved Addition af disse tre Ligninger erholdes paa venstre Side

$$\frac{dr^s\rho}{dr} = \Sigma \frac{dr^{s-n-1}\rho_n^m}{dr} \cdot r^{n+1} V_n^m .$$

Paa højre Side indsættes de ovenfor fundne Værdier af xV_n^m, yV_n^m og $z\frac{d}{dz}V_{n-1}^m$, hvorefter paa begge Sider Koefficienterne til V_n^m sættes lige store. Paa denne Maade erholdes, naar man sætter $s = n+1$,

$$\frac{2n-1}{2n+1}\frac{d\rho_n^m}{rdr} + \xi_{n-1}^m + \eta_{n-1}^{m-1} - \zeta_{n-1}^m - \zeta_{n-1}^{m-2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

og naar man sætter $s = -n$,

$$\frac{2n+3}{2n+1} r^{2n+2} \frac{d}{dr}\frac{\rho_n^m}{r^{2n+1}} + (m+2)(m+1)\,\xi_{n+1}^{m+2} - \left((n+1)^2 - m^2\right)\xi_{n+1}^m - (m+1)(2n-m+1)\,\eta_{n+1}^{m+1}$$
$$+ (n-m+2)(n-m+1)\,\eta_{n+1}^{m-1} - (m+2)(m+1)\,\zeta_{n+1}^{m+2} - \left((n-m)^2 + m^2 + n + 1\right)\zeta_{n+1}^m$$
$$- (n-m+2)(n-m+1)\,\zeta_{n+1}^{m-2} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Indsættes heri de i Ligningerne (15) givne Udtryk for ρ_n^m, o. s. v., saa erholdes med Benyttelse af Ligningerne (16)

$$\left.\begin{aligned} &(2n-1)\,k_n^m + a_{n-1}^m + b_{n-1}^{m-1} - c_{n-1}^m - c_{n-1}^{m-2} = 0, \\ &\frac{\mu}{2n+1}\,\varkappa_n^m + \alpha_{n-1}^m + \beta_{n-1}^{m-1} - \gamma_{n-1}^m - \gamma_{n-1}^{m-2} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\mu}{2n+1} k_n^m + (m+2)(m+1)\,a_{n+1}^{m+2} - \left((n+1)^2 - m^2\right)a_{n+1}^m - (m+1)(2n-m+1)\,b_{n+1}^{m+1} \\ &+ (n-m+2)(n-m+1)\,b_{n+1}^{m-1} - (m+2)(m+1)\,c_{n+1}^{m+2} - \left((n-m)^2 + m^2 + n + 1\right)c_{n+1}^m \\ &\qquad - (n-m+2)(n-m+1)\,c_{n+1}^{m-2} = 0, \\ &-(2n+3)\,\varkappa_n^m + (m+2)(m+1)\,\alpha_{n+1}^{m+2} - \left((n+1)^2 - m^2\right)\alpha_{n+1}^m - (m+1)(2n-m+1)\,\beta_{n+1}^{m+1} \\ &+ (n-m+2)(n-m+1)\,\beta_{n+1}^{m-1} - (m+2)(m+1)\,\gamma_{n+1}^{m+2} - \left((n-m)^2 + m^2 + n + 1\right)\gamma_{n+1}^m \\ &\qquad - (n-m+2)(n-m+1)\,\gamma_{n+1}^{m-2} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Foruden disse Relationer imellem de indenfor ethvert af Lagene konstante Koefficienter maa man ogsaa opsøge Relationerne imellem de forskjellige Koefficienter i to tilgrænsende Lag.

Betegnes Koefficienterne i det indre tilgrænsende Lag ved et Mærke, og er r Grænsefladens Radius, saa erholdes af Ligningerne (5) og (6)

$$\left.\begin{aligned} k_n^m \frac{dr^{-n}\varphi_n}{dr} + \varkappa_n^m \frac{dr^{-n}\psi_n}{dr} &= k_n'^m \frac{dr^{-n}\varphi_n'}{dr} + \varkappa_n'^m \frac{dr^{-n}\psi_n'}{dr}, \\ \mu\left(k_n^m\varphi_n + \varkappa_n^m\psi_n\right) &= \mu'\left(k_n'^m\varphi_n' + \varkappa_n'^m\psi_n'\right), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

idet φ_n' og ψ_n' ere de samme Funktioner som φ_n og ψ_n, blot med Forandring af μ til μ'.

Naar den betragtede Grænseflade er den Centrum nærmeste, saa tilhører Koefficienterne $k_n'^m$ og $\varkappa_n'^m$ det centrale Kuglelag. Her maa alle Koefficienterne $\varkappa_n'^m$ forsvinde, da i modsat Tilfælde ρ vilde blive uendelig i selve Centret, og af Ligningerne (24) kan $k_n'^m$ bortskaffes ved Elimination. Derefter kan man gaa over til den næste Grænseflade og saaledes videre, hvoraf ses, at man for et hvilket som helst Lag vil kunne finde en Ligning

$$\varkappa_n^m = p_n k_n^m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

hvor p_n afhænger alene af n og af de Værdier, som μ og Grænsefladernes Radier gjennemløbe indenfor det betragtede Lag.

Ligeledes erholdes af Ligningerne (8), (9) og (10) ved Indsættelse af Rækkeudviklingerne og Sammenligning af Koefficienterne til V_n^m sex Ligninger, som ved Hjælp af Ligningerne (20) og (21) kunne reduceres til følgende to Grænsebetingelser:

$$\left[m\left(\xi_n^m - \zeta_n^m\right) - (n-m+1)\left(\eta_n^{m-1} - \zeta_n^{m-2}\right)\right] = 0,$$

$$\left[\frac{d}{dr}\left(m\left(\xi_n^m - \zeta_n^m\right) - (n-m+1)\left(\eta_n^{m-1} - \zeta_n^{m-2}\right)\right)\right] = 0.$$

Sættes for Kortheds Skyld

$$\left.\begin{aligned} m\left(a_n^m - c_n^m\right) - (n-m+1)\left(b_n^{m-1} - c_n^{m-2}\right) &= s_n^m, \\ m\left(\alpha_n^m - \gamma_n^m\right) - (n-m+1)\left(\beta_n^{m-1} - \gamma_n^{m-2}\right) &= \sigma_n^m, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

saa erholdes med samme Betydning af de markerede Bogstaver som ovenfor

$$\left.\begin{aligned} s_n^m\varphi_n + \sigma_n^m\psi_n &= s_n'^m\varphi_n' + \sigma_n'^m\psi_n', \\ s_n^m\frac{d\varphi_n}{dr} + \sigma_n^m\frac{d\psi_n}{dr} &= s_n'^m\frac{d\varphi_n'}{dr} + \sigma_n'^m\frac{d\psi_n'}{dr}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

hvoraf atter, paa ganske lignende Maade som ovenfor, erholdes

$$\sigma_n^m = q_n s_n^m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

idet q_n alene afhænger af n og af de Værdier, som μ og r gjennemløbe indenfor det betragtede Lag.

Efter at saaledes de almindelige Ligninger til Udførelsen af Beregningen af Lysbevægelserne i et af koncentriske, homogene Kuglelag bestaaende Lysmedium ere opstillede, skal jeg gaa over til Undersøgelsen af Lysbevægelserne i det Indre af et isotropt Legeme, idet jeg, saaledes som bemærket i Indledningen, betragter Atomerne som Punkter, hvoromkring Lysmediet indtil en vis Afstand lejrer sig i koncentriske Lag, medens det udenfor denne Afstand, som antages mindre end to Naboatomers halve Middelafstand, forholder sig som i det tomme Rum.

Er δ den halve Middelafstand af to Naboatomer, og antages i Afstanden δ fra et af Atomerne Lyssvingningerne parallele med y-Axen, saa vil man, naar tillige Bevægelsen antages at forplante sig i Retning af x-Axen, kunne sætte

$$\text{for } r = \delta, \quad \xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \eta = e^{(kt-lx)i}F, \qquad (29)$$

idet F er en Funktion, som gjentager sig periodisk fra Atom til Atom. Den sidste Formel fremstiller altsaa en Bølgebevægelse, som forplanter sig igjennem Legemet med Hastigheden $\frac{k}{l}$.

For nærmere at bestemme Betydningen af Funktionen F, ville vi betragte to Atomer, hvis Afstand er 2δ. En ret Linie igjennem de to Atomer skjærer de to tangerende Kugleflader, hvis Centrer ere de to Atomer og hvis Radier ere lig δ, i de tre Punkter A, B og C. De Værdier, F antager i denne rette Linie, kunne fremstilles ved en Kurve, som fra A til B og fra B til C gjentager sig paa samme Maade, saaledes at F faar de samme Værdier i A og i B, og at Tangenterne til Kurven i disse to Punkter blive parallele. Da r regnes positiv til begge Sider fra Centret, vil altsaa $\frac{dF}{dr}$ i A og i B faa lige store Værdier, men med modsatte Fortegn.

Man har

$$e^{kti}F = e^{lxi}\eta = e^{lxi}\Sigma\eta_n^m V_n^m,$$

i hvilken Række Leddene for to diametralt modsatte Punkter blive lige store og for n lige faa samme Fortegn, for n ulige modsatte Fortegn. Man vil følgelig erholde

for $r = \delta$

$$e^{lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right) = e^{-lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right),$$

$$\frac{d}{dr}\left(e^{lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right) + e^{-lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right)\right) = 0,$$

hvilke Ligninger kunne omdannes til

$$\left.\begin{aligned} \left(e^{lxi} - e^{-lxi}\right)\Sigma\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \left(e^{lxi} + e^{-lxi}\right)\Sigma\eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m &= 0, \\ \left(e^{lxi} + e^{-lxi}\right)\frac{d}{dr}\Sigma\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \left(e^{lxi} - e^{-lxi}\right)\frac{d}{dr}\Sigma\eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Disse to Ligninger gjælde for de Punkter, hvori Kuglefladen tangeres af en anden lignende Kugleflade. Dette er altsaa kun et begrænset Antal Punkter, men disse Punkter ligge tilfældigt og kunne, da Legemet antages isotropt, med samme Sandsynlighed falde i ethvert Punkt af Kuglefladen. Jeg antager derfor Ligningerne almindelig gjældende for alle Punkter i Kuglefladen $r = \delta$.

Ved den videre Behandling af disse Ligninger er det af Vigtighed at bemærke, at lx kan betragtes som en meget lille Størrelse. Denne Omstændighed har allerede været benyttet af Helmholtz [1]), som i sin Dispersionstheori er gaaet ud fra den Antagelse, at «de ponderable Deles indbyrdes Afstande ere forsvindende smaa i Sammenligning med Bølgelængderne». Man er i Virkeligheden som bekjendt ad meget forskjellige Veje bleven i Stand til i det mindste at danne sig et Begreb om disse Afstande. Saaledes vil Bølgelængden af det synlige Lys for Exempel for Vand være henimod 10000 Gange større end δ, og for Luftarterne maa, selv ved den største Fortynding, hvorved overhovedet Farvespredningen lader sig maale, Bølgelængden endnu være flere hundrede Gange større end δ.

Nu er

$$N = \frac{lO}{k}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} O, \qquad l = \frac{2\pi}{\lambda} N,$$

naar N er Legemets Brydningsforhold, O Lysets Hastighed i det tomme Rum og λ den ligeledes til det tomme Rum svarende Bølgelængde. Af den sidste Ligning ses, at lx, som i ovenstaaende Formler ikke kan blive større end $l\delta$, maa være en meget lille Størrelse af samme Orden som $\frac{\delta}{\lambda}$.

Tillige bemærkes, at naar μ for $r = \delta$ betegnes ved μ_δ, saa er

$$\mu_\delta = \frac{k^2}{O^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2},$$

og altsaa

$$N^2 = \frac{l^2}{\mu_\delta}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (31)$$

Det ses heraf, at naar $l\delta$ betragtes som en uendelig lille Størrelse af første Orden, saa vil $\mu_\delta \delta^2$ være uendelig lille af anden Orden, og at N^2 fremtræder som et Forhold imellem to uendelig smaa Størrelser af anden Orden.

Idet altsaa lx betragtes som en uendelig lille Størrelse, erholdes af Ligningerne (30)

$$lxi \Sigma \eta_{2n}^m V_{2n}^m + \Sigma \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \Sigma \eta_{2n}^m V_{2n}^m + lxi \frac{d}{dr} \Sigma \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0.$$

Ved Hjælp af den første Ligning (17) fremgaaer heraf, idet Koefficienterne til V_{2n+1}^m og V_{2n}^m sammenlignes, for $r = \delta$

$$\left.\begin{aligned} li\left(-\frac{r^2}{4n+1}\eta_{2n}^m - \frac{(2n+2)^2 - m^2}{4n+5}\eta_{2n+2}^m + \frac{(m+2)(m+1)}{4n+5}\eta_{2n+2}^{m+2}\right) + \eta_{2n+1}^m = 0, \\ lir\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n+2}}\left(-\frac{r^2}{4n-1}\eta_{2n-1}^m - \frac{(2n+1)^2 - m^2}{4n+3}\eta_{2n+1}^m + \frac{(m+2)(m+1)}{4n+3}\eta_{2n+1}^{m+2}\right) + \frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n+1}}\eta_{2n}^m = 0. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

[1]) Pogg. Ann. Bd. 154, S. 584.

Sættes $n = 0$, $m = 0$ erholdes

for $r = \delta$

$$\left.\begin{aligned} li\left(-r^2\eta_0^0 - \frac{4}{5}\eta_2^0 + \frac{2}{5}\eta_2^2\right) + \eta_1^0 = 0, \\ -\frac{1}{3}lir\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}\eta_1^0 + \frac{d}{dr}\frac{1}{r}\eta_0^0 = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Da man vilkaarlig kan betragte $r^2\eta_0^0$ som en endelig Størrelse, saa ville de i den første Ligning indgaaende Størrelser η_2^0 og η_2^2 kun faa Betydning, for saa vidt de ere endelige. Naar der derfor i den anden Ligning (32) sættes $n = 1$, $m = 0$ og $m = 2$, saa vil det første Led, som indeholder Faktoren lr, kunne bortkastes, hvorefter faas

for $r = \delta$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r^3}\eta_2^0 = 0, \qquad \frac{d}{dr}\frac{1}{r^3}\eta_2^2 = 0.$$

Ved Indførelsen af de konstante Koefficienter (Lign. (15)) erholdes heraf for de til det yderste Lag indtil $r = \delta$ svarende Konstanter, naar de uendelig smaa Størrelser bortkastes,

$$2b_0^0\delta^5 = 3\beta_2^0, \qquad 2b_2^2\delta^5 = 3\beta_2^2.$$

For det samme Lag er ifølge de to første Ligninger (29)

$$a_2^1\delta^5 + \alpha_2^1 = 0, \qquad c_2^1\delta^5 + \gamma_2^1 = 0.$$

Sættes endvidere i den anden Ligning (22) $n = 3$, $m = 1$ og $m = 3$, erholdes med Bortkastelse af det første, uendelig lille Led,

$$\alpha_2^1 + \beta_2^0 - \gamma_2^1 = 0, \qquad \beta_2^2 - \gamma_2^1 = 0,$$

medens Ligningerne (23) for $n = 1$, $m = 1$ give

$$-3a_2^1 - 4b_2^2 + 2b_2^0 - 3c_2^1 = 0,$$

$$-5\varkappa_1^1 - 3\alpha_2^1 - 4\beta_2^2 + 2\beta_2^0 - 3\gamma_2^1 = 0.$$

Disse 8 Ligninger ere dog endnu ikke tilstrækkelige til Bestemmelsen af de 8 Konstanter ved $\varkappa_1^1$, da det viser sig, at Ligningerne indeholde en Identitet. Imidlertid fremgaar af Ligningerne (26) og (28) for $n = 2$, $m = 1$,

$$s_2^1 = a_2^1 - c_2^1 - 2b_2^0, \quad \sigma_2^1 = \alpha_2^1 - \gamma_2^1 - 2\beta_2^0, \quad \sigma_2^1 = q_2 s_2^1,$$

som med Ligningerne ovenfor give

$$s_2^1\delta^5 = -2\beta_2^0, \quad \sigma_2^1 = -3\beta_2^0, \text{ altsaa } 3\beta_2^0\delta^5 = 2\beta_2^0 q_2.$$

Men da q_2 kun afhænger af de Værdier, som μ og Grænsefladernes Radier antage indenfor det yderste Lag, saa maa man have $\beta_2^0 = 0$. Dernæst erholdes af de ovenfor fremsatte Ligninger

$$b_2^0 = 0, \qquad b_2^2\delta^5 = \frac{3}{2}\beta_2^2 = -\frac{3}{4}\varkappa_1^1.$$

Indsættes endvidere i Ligningerne (22) $n = 1$ og $m = 1$, erholdes

$$k_1^1 + b_0^0 = 0, \qquad \frac{1}{3}\mu\varkappa_1^1 + \beta_0^0 = 0,$$

gjældende for alle Lagene. For det yderste Lag, hvor μ betegnes ved μ_δ, er saaledes med Bibeholdelse af de smaa Størrelser af anden Orden

$$\eta_0^0 = -k_1^1\left(r - \frac{1}{6}\mu_\delta r^3\right) - \frac{1}{3}\mu_\delta \varkappa_1^1.$$

Ligningerne (33) ville nu kunne omdannes til

$$li\left(k_1^1\delta^3 - \frac{1}{2}\varkappa_1^1\right) + b_1^0\delta^3 + \beta_1^0 = 0,$$

$$-li(b_1^0\delta^3 - 2\beta_1^0) + \mu_\delta(k_1^1\delta^3 + \varkappa_1^1) = 0,$$

hvoraf erholdes

$$\frac{l^2}{\mu_\delta} = N^2 = \frac{k_1^1\delta^3 + \varkappa_1^1}{k_1^1\delta^3 - \frac{1}{2}\varkappa_1^1} \cdot \frac{b_1^0\delta^3 + \beta_1^0}{b_1^0\delta^3 - 2\beta_1^0}.$$

Ifølge Ligning (25) er

$$\varkappa_1^1 = p_1 k_1^1.$$

Endvidere er ifølge den første Ligning (29) for $r = \delta$ $\xi_1^1 = 0$, altsaa med Bortkastelse af de uendelig smaa Størrelser af højere Orden

$$a_1^1\delta^3 + \alpha_1^1 = 0,$$

og sættes i den anden Ligning (22) $n = 2$, $m = 1$ erholdes med Bortkastelse af det første uendelig lille Led af anden Orden for det yderste Lag

$$\alpha_1^1 + \beta_1^0 = 0,$$

medens Ligningerne (26) og (28) for $n = 1$, $m = 1$ give

$$a_1^1 - b_1^0 = s_1^1, \quad \alpha_1^1 - \beta_1^0 = \sigma_1^1, \quad \sigma_1^1 = q_1 s_1^1.$$

Af disse Ligninger følger

$$\frac{\beta_1^0}{b_1^0} = \frac{q_1\delta^3}{q_1 + 2\delta^3}.$$

Brydningsforholdet N vil saaledes være bestemt ved den simple Ligning

$$N^2 = \frac{\delta^3 + p_1}{\delta^3 - \frac{1}{2}p_1} \cdot \frac{\delta^3 + q_1}{\delta^3 - \frac{1}{2}q_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

hvor p_1 og q_1 ere to af δ uafhængige Funktioner.

Vi have antaget μr^2 uendelig lille i det indenfor $r = \delta$ liggende ydre Lag, men i andre Lag maa denne Størrelse antage en endelig Værdi, hvis overhovedet en Brydning i Legemet skal finde Sted. Antage vi, at μr^2 indenfor Grænsefladen $r = \varepsilon$ bliver endelig, saa vil af den anden Ligning (24) erholdes

for $r = \varepsilon$, $$0 = k_n'^m \varphi_n' + \varkappa_n'^m \psi_n',$$

medens man ifølge Ligning (25) skal have $\varkappa_n'^m = p_n' k_n'^m$, hvor p_n' er uafhængig af ε. Man maa følgelig have $k_n'^m = 0$ og $\varkappa_n'^m = 0$, det vil sige, Svingningerne ere indenfor Grænsefladen $r = \varepsilon$ vinkelret paa Radius. Dette er ogsaa umiddelbart indlysende, da vor Forudsætning er ensbetydende med, at Lysets Hastighed i Grænsefladen $r = \varepsilon$ fra en uendelig stor Værdi gaar over til at blive endelig, hvorved alle indfaldende Lysstraaler maa brydes ind til Midtpunktet og Svingningerne derfor blive vinkelret paa Radius.

Dernæst erholdes af den første Ligning (24) for $n = 1$, $m = 1$

$$k_1^1 \cdot 2\varepsilon - \frac{\varkappa_1^1}{\varepsilon^2} = 0, \quad \text{hvoraf } p_1 = 2\varepsilon^3.$$

Man vil altsaa tilnærmelsesvis kunne betragte p_1 som en Størrelse, der er proportional med Rumfanget af det i Atomets Nærhed stærkt forandrede Lysmedium, men er uafhængig af selve dette Mediums Brydning.

Den anden i Ligningen (34) indgaaende Størrelse q_1 vil være at beregne af Ligningerne (27) og (28).

Paa hvilken Maade q_1 afhænger af Bølgelængden, skal jeg først søge at oplyse ved et Exempel. Jeg antager, at μ udenfor Grænsefladen $r = \varepsilon$ er lig 0, indenfor endelig og overalt konstant lig μ'. I Ligningerne (27) vil i dette Tilfælde $\sigma_n'^m$ være lig 0, og sættes $n = 1$, vil man med Bortkastelse af den øvre Index m have

$$s_1\varepsilon^3 + \sigma_1 = s_1'\left(\varepsilon^3 - \frac{1}{10}\mu'\varepsilon^5 + \ldots\right),$$

$$3s_1\varepsilon^2 \quad = s_1'\left(3\varepsilon^3 - \frac{1}{2}\mu'\varepsilon^4 + \ldots\right),$$

hvoraf findes

$$\frac{\sigma_1}{s_1} = q_1 = \frac{1}{15}\mu'\varepsilon^5 + \ldots = \frac{a}{\lambda^2} + \ldots$$

Man vil altsaa, forudsat at Rækkeudviklingen er konvergent, kunne udvikle q_1 i en Række efter stigende Potenser af $\frac{1}{\lambda^2}$, og det første Led i Rækken vil være positivt.

Naar ganske i Almindelighed μ betragtes som en endelig og kontinuerlig variabel Funktion, saa maa man gaa tilbage til Differentialligningen (13), af hvilken Grænsebetingelserne (27) kunne udledes. Antages ligesom før $r = \varepsilon$ som den Grænse, udenfor hvilken μ er 0, saa vil Opgaven være at integrere Differentialligningen under de Betingelser, at man for $r = 0$ faar $f_n = 0$ og for $r = \varepsilon$ $f_n = s_n(r^{2n+1} + q_n)$, $\frac{df_n}{dr} = (2n+1)s_n r^{2n}$. Efter Eliminationen af de to arbitrære Konstanter vil der da af disse tre Ligninger erholdes en Endeligning til Bestemmelse af q_n. Forudsættes det nu, at f_n overalt lader sig udvikle i en konvergent Række efter Potenser af den i μ indgaaende Faktor $\frac{1}{\lambda^2}$, saa vil det uden Vanskelighed indses, at q_n almindelig lader sig udvikle i en Række af Formen

$$\frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} + \ldots .$$

Man vil saaledes se, at naar det til en uendelig Bølgelængde, og altsaa til $q_1 = 0$, svarende Brydningsforhold betegnes ved A, saa erholdes af Ligning (34)

$$A^2 = \frac{\delta^3 + p_1}{\delta^3 - \frac{1}{2}p_1}, \qquad \frac{A^2 - 1}{A^2 + 2}\delta^3 = \tfrac{1}{2}p_1, \qquad \frac{N^2 - A^2}{N^2 + 2A^2}\delta^3 = \tfrac{1}{2}q_1.$$

Som Resultat af denne Undersøgelse fremgaar, at Lovene for Brydningen i et gjennemsigtigt, isotropt Legeme med sædvanlig Farvespredning ville kunne udtrykkes ved følgende Ligninger

$$\frac{A^2 - 1}{A^2 + 2}\frac{1}{d} = R, \qquad \frac{N^2 - A^2}{N^2 + 2A^2}\frac{1}{d} = D = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} + \ldots,$$

idet N er Legemets Brydningsforhold, d dets Vægtfylde, R og D to af Vægtfylden uafhængige Konstanter. Endvidere er a en positiv Konstant, og som det af Ligningerne selv fremgaar, vil A være det til $\lambda = \infty$ svarende Brydningsforhold.

Den første af disse Ligninger har jeg allerede for 14 Aar siden[1]) udledet theoretisk paa en ganske anden Maade, og Lovens Rigtighed har senere stadfæstet sig paa mange Maader. Af mine egne Forsøg over nogle Vædskers og deres Dampes Brydning har jeg beregnet følgende til Natriumlinien svarende «Dispersionskonstanter» D, idet A er beregnet ved den simplere Formel $N^2 = A^2 + \frac{a}{\lambda^2}$.

	Vædske ved 10°	Damp ved 100°
Alkohol	0,00585	0,00644
Æthylæther	636	623
Chloroform	413	409
Jodæthyl	551	579
Svovlkulstof	1615	1732
Eddikeæther	536	550

Overensstemmelsen mellem Værdierne af D for disse to forskjellige Tilstandsformer maa betragtes som meget tilfredsstillende.

Naar de i (14) givne Rækkeudviklinger for φ_1 og ψ_1 ikke ere brugbare, saa ville disse Funktioner, naar for Kortheds Skyld sættes $\mu = \alpha^2$, kunne udtrykkes ved

$$\varphi_1 = 3\frac{\sin \alpha r - \alpha r \cos \alpha r}{\alpha^3}, \qquad \psi_1 = \cos \alpha r + \alpha r \sin \alpha r.$$

Er f. Ex. $\mu = 0$ udenfor Grænsefladen $r = \varepsilon$ og $\mu = \alpha^2$ indenfor denne Flade, vil man have

$$s_1\varepsilon^3 + \sigma_1 = s_1' 3\frac{\sin \alpha\varepsilon - \alpha\varepsilon \cos \alpha\varepsilon}{\alpha^3},$$

$$3s_1\varepsilon^2 = s_1'\frac{3\varepsilon}{\alpha} \sin \alpha\varepsilon,$$

[1]) Vidensk. Selsk. Skrifter, 5te Række, Bd. 8, S. 205. 1869.

hvoraf erholdes

$$\frac{\sigma_1}{s_1} = q_1 = -\varepsilon^3 - \frac{3\varepsilon^2}{a}\cot a\varepsilon + \frac{3\varepsilon}{a^2}.$$

Det ses heraf, at naar Bølgelængden λ og derved ogsaa a gjennemløber alle Værdier, saa vil q_1 kunne antage en hvilken som helst reel Værdi imellem $-\infty$ og $+\infty$. Ifølge den anden Ligning (35) vil altsaa ogsaa ved visse Værdier af λ N^2 kunne blive negativ og følgelig N imaginær, hvilket i denne Regning er ensbetydende med en Absorbtion.

Antages, at μ indenfor Grænsefladen $r = \varepsilon$ er endelig og at Rækkerne ere konvergente, indtil de i en meget lille Afstand fra Centret gaa over til at blive divergente, saa vil Absorbtionen kun indtræde ved enkelte bestemte Bølgelængder, saaledes at vi erholde et sædvanligt af Absorbtionslinier ledsaget Dispersionsspektrum.

Idet saaledes den her fremstillede Theori ikke udelukker Muligheden af en Absorbtion, saa vil paa den anden Side en ufuldkommen Absorbtion, hvor N antager den komplexe Form $a + bi$, ikke kunne udledes af vore Forudsætninger. Hvis derfor Loven for den anomale Dispersion skal udledes theoretisk, saa vil det være nødvendigt at udvide Beregningen til et System af Atomer, som svarer til sammensatte Legemer eller Blandinger. Det vil da først vise sig, om det ogsaa vil være nødvendigt at forandre selve Theoriens Grundlag saaledes, at μ betragtes som en komplex Variabel, hvilket atter vilde være identisk med til de oprindelige Differentialligninger for Lysbevægelserne at tilføje et den første Differentialkoefficient med Hensyn til t indeholdende Led. I saa Tilfælde vilde Ligningerne antage den samme Form, som jeg allerede har angivet i min Afhandling om Identiteten af Lyssvingninger og elektriske Strømme[1]). Der vil overhovedet, efter at ved de her angivne Methoder Muligheden af Beregningen af Lysbevægelserne i Legemernes Indre er paavist, blive en vid Mark aaben for videre gaaende Undersøgelser.

---

[1]) Vidensk. Selsk. Oversigt 1867. Nr. 1.